UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1990/91

Oktober/November 1990

EUM 331 - Kaedah Berangka

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 7 muka surat bercetak dan LIMA (5) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab KESEMUA soalan. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan di dalam Bahasa Malaysia.

"Crafty men condemn studies; simple men admire them, and wise men use them" (Francis Bacon).

1. (a) Nilai fungsi $F(x)$ pada titik-titik tertentu adalah diberi seperti berikut:-

x	2	4	6	8	10
F(x)	15	105	315	693	1287

(i) Jikalau $F(x)$ ialah fungsi polinomial yang berperingkat $n \leq 4$, selesaikan, secara tepat, $F(x) = 0$.

(ii) Guna interpolasi songsang untuk menyelesaikan, secara hampiran, $F(x) = 150$.

(30%)

(b) Nilai fungsi $f(x)$ pada titik $x = x_i$ ialah f_i $(i = 0, 1, 2)$. Kita ingin menghampiri $f(x)$ dengan menggunakan fungsi $P(x)$ yang terbentuk

$$P(x) = A_0 + A_1 \cos(2x) + A_2 \sin(2x).$$

Pemalar-pemalar A_0, A_1 dan A_2 adalah dipilih supaya $P(x)$ memenuhi syarat-syarat

$$P(x_i) = f_i \text{ bagi } i = 0, 1, 2 .$$

(i) Tunjukkan bahawa $P(x)$ adalah diberi oleh

$$P(x) = \frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)}{\sin(x_0 - x_1)\sin(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{\sin(x - x_0)\sin(x - x_2)}{\sin(x_1 - x_0)\sin(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{\sin(x - x_0)\sin(x - x_1)}{\sin(x_2 - x_0)\sin(x_2 - x_1)} f_2$$

(30%)

...3/-

(ii) Guna bahagian (b)(i) untuk mendapat suatu nilai hampiran bagi $\sqrt{3}$ dengan menggunakan $f(x) = \sqrt{x}$ dan titik-titik $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ dan $x_2 = 4$.

Bandingkan nilai hampiran anda dengan nilai $\sqrt{3}$ yang didapati dari mesinkira.

(10%)

(c) Huraikan suatu algoritma berangka yang boleh digunakan untuk menyelesaikan

$$y''''(x) = F(x, y', y'', y'''), \; y = y(x), \; x \geq x_0,$$

diberi $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$ dan $y'''(x_0) = y_0'''$.

Guna algoritma ini untuk menyelesaikan, secara hampiran, $y''''(x) = y^2 - y''(x)$, $0 \leq x \leq 1$, diberi $y_0 = 0$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 1$ dan $y_0''' = 1$, dengan membahagikan [0, 1] kepada dua subselang yang mempunyai saiz yang sama.

(30%)

(Petunjuk : $y(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x)$.)

2. Pertimbangkan kamiran

$$I = \int_{-a}^{a} f(x) \exp(-x^2)\, dx, \qquad a > 0.$$

Kita ingin mendapat suatu rumus hampiran untuk I (jika wujud) dalam bentuk

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

Nilai A_i dan x_i ($i = 1, 2$) adalah dipilih supaya rumus itu menjadi tepat bagi fungsi-fungsi polinomial $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^3$.

(a) Tunjukkan bahawa
$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}\phi(a)$ dan $x_1 = -x_2 = \sqrt{\frac{1}{2} - a\left[\phi(a)\exp(a^2)\right]^{-1}}$,
yang mana

$$\phi(a) = \int_{-a}^{a} \exp(-x^2)dx .$$

(40%)

(b) Diberi $\lim_{a \to \infty} \phi(a) = \sqrt{\pi}$, dapatkan suatu nilai hampiran bagi

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\exp(-x^2)\,dx .$$

(20%)

Jika $a \to \infty$, ralat bagi rumus di atas adalah diberi oleh
$R(\zeta) = \sqrt{\pi}\, f^{(4)}(\zeta)/192,\ -\infty < \zeta < \infty$. Berikan suatu analisis ralat bagi nilai hampiran yang anda dapat untuk J.

(10%)

(c) Nilaikan, secara hampiran,

$$L = \int_{-1}^{1} \exp\{x[1 - (x/\sqrt{2})]/\sqrt{2}\}\,dx,$$

dengan menggunakan

(i) rumus hampiran di atas, diberi $\phi(1/\sqrt{2}) = 0.682\,689\,\sqrt{\pi}$,

(20%)

(ii) petua Simpson 3/8, iaitu

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

Beri ulasan.

(10%)

3. <u>Kaedah pembahagian dua sama : satu analisis penumpuan</u>

Andaikan f adalah satu fungsi selanjar yang mempunyai tanda berlawanan di hujung-hujung selang $[\ell_o, u_o]$. Kita juga andai bahawa cuma ada satu punca, r, di dalam $[\ell_o, u_o]$. Maka titik tengah,

$$c_o = (\ell_o + u_o)/2$$

adalah hampiran pertama bagi r.

(a) Apakah yang dimaksudkan dengan $|r - c_o|$? (10%)

(b) Dengan menggunakan satu rajah yang sesuai, tunjukkan bahawa

$$|r - c_o| \leq (u_o - \ell_o)/2$$

Lelaran-lelaran seterusnya menghasilkan $\{\ell_1, u_1, c_1\}, \{\ell_2, u_2, c_2\}, \ldots$ Tunjukkan, dengan sebarang cara, bahawa

$$|r - c_n| \leq (u_n - \ell_n)/2$$ (20%)

(c) Dengan kaedah aruhan matematik buktikan bahawa

$$u_n - \ell_n = (u_o - \ell_o)/2^n$$ (25%)

(d) Dengan sebarang kaedah tunjukkan bahawa

$$\ell_n u_n + \ell_{n-1} u_{n-1} = \ell_{n-1} u_n + \ell_n u_{n-1}$$ (25%)

(e) Diberi bahawa $c_n = (\ell_n + u_n)/2$, tunjukkan bahawa

$$\text{had}_{n \to \infty} \ell_n = \text{had}_{n \to \infty} u_n = \text{had}_{n \to \infty} c_n$$

[Petunjuk : hubungan dari (c) mungkin berguna).

(20%)

4. Hukum gas unggul diberi oleh

(*) $PV = nRT$

yang mana P adalah tekanan mutlak, V adalah isipadu, n adalah nombor mol, R adalah pemalar gas semesta dan T adalah suhu mutlak.

Persamaan van der Waals pula memberikan hubungan yang lebih tepat melalui

(**) $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$

yang mana v = V/n adalah isipadu molal, a dan b adalah pemalar ghalib bagi gas berkenaan.

(a) Gunakan (*) untuk mengira v bagi karbon dioksida apabila T = 300 dan P = 1. (Biar R = 0.082054).

(10%)

(b) Untuk mendapatkan v yang lebih tepat, persamaan (**) perlu digunakan bersama-sama Kaedah Newton-Raphson. Kira v bagi karbon dioksida yang mana a = 3.592, b = 0.04267. Hentikan lelaran apabila ralat hampiran mengurangi 0.01%.

[Petunjuk : soalan (a) di atas boleh mencadangkan suatu nilai awal yang baik].

(60%)

(c) Kenapakah Kaedah Newton-Raphson sesuai di dalam kes ini?

(30%)

5. (a) Pertimbangkan set persamaan di bawah.

$$7x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -49$$
$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5$$
$$3x_1 - 6x_2 + 10x_3 = -84$$

(i) Kira penentu bagi sistem ini.

(ii) Guna petua Cramer untuk cari x_1, x_2, x_3.

(40%)

(b) Bincangkan peranan santaian (relaxation) di dalam Kaedah Gauss-Seidel.

(20%)

(c) Pertimbangkan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

yang mana $a_{ii} \neq 0$ bagi $i = 1, 2, 3, 4$.

(i) Apakah yang dihasilkan oleh algoritma di bawah jika matriks A di atas digunakan?

$\ell_{11} = a_{11}$

for $i = 2, 3, 4$

  $\ell_{i,i-1} = a_{i,i-1}$

  $u_{i-1,i} = a_{i-1,i}/\ell_{i-1,i-1}$

    $\ell_{ii} = a_{i,i} - \ell_{i,i-1}\,u_{i-1,i}$

end for

Andaikan ℓ_{ij} adalah unsur-unsur bagi matriks tripepenjuru bawah L, dan u_{ji} adalah unsur-unsur bagi matriks tripepenjuru atas unit U.

(ii) Apakah kaitan A dengan L dan U?

(40%)

- oooOooo -